

Sviluppare il pensiero pre-algebrico

Un ponte tra **PerContare** e il progetto ArAI

Anna Baccaglini-Frank – Università di Pisa

Alessandro Ramploud – Università di Bergamo

Silvia Funghi – Università di Genova

I webinar dell'a.a. 2024/25

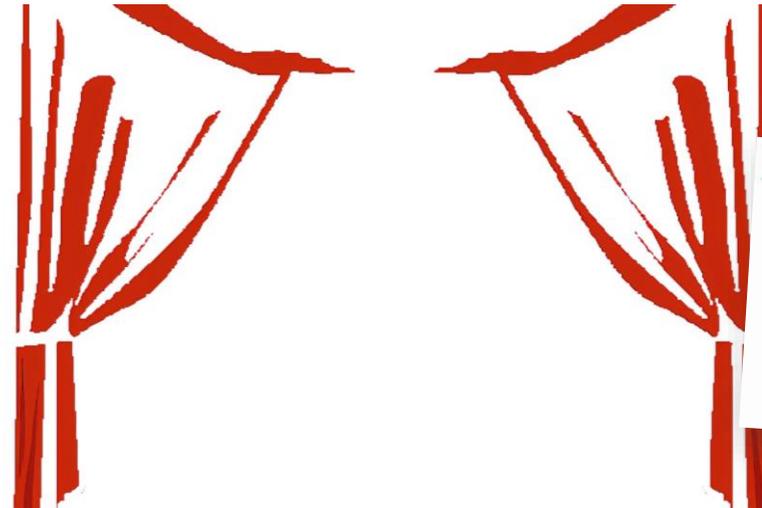
Data	Esperto AIRDM	Titolo
12 novembre 2024	Elisabetta Robotti	La didattica della matematica in prospettiva inclusiva: un ponte tra PerContare e le ricerche sull'inclusione
20 marzo 2025	Annalisa Cusi	Sviluppare il pensiero pre-algebrico: un ponte tra i problemi con variazione in PerContare e il progetto ArAI
22 maggio 2025	Rosetta Zan	Errori e difficoltà in matematica: dalla ricerca ad alcuni esempi in PerContare

Qual è l'obiettivo di questi webinar?



PerContare come "porta di accesso" al mondo della ricerca in Didattica della Matematica

Arricchire lo "sfondo" a cui si legano i principi di design delle attività di PerContare, che stanno "dietro le quinte"



Webinar del 16/09/2020
<https://www.percontare.it/video-formativi/webinar/>

I problemi con variazione in PerContare

Dalla versione orientale alla Trasposizione Culturale italiana, alle proposte delle guide

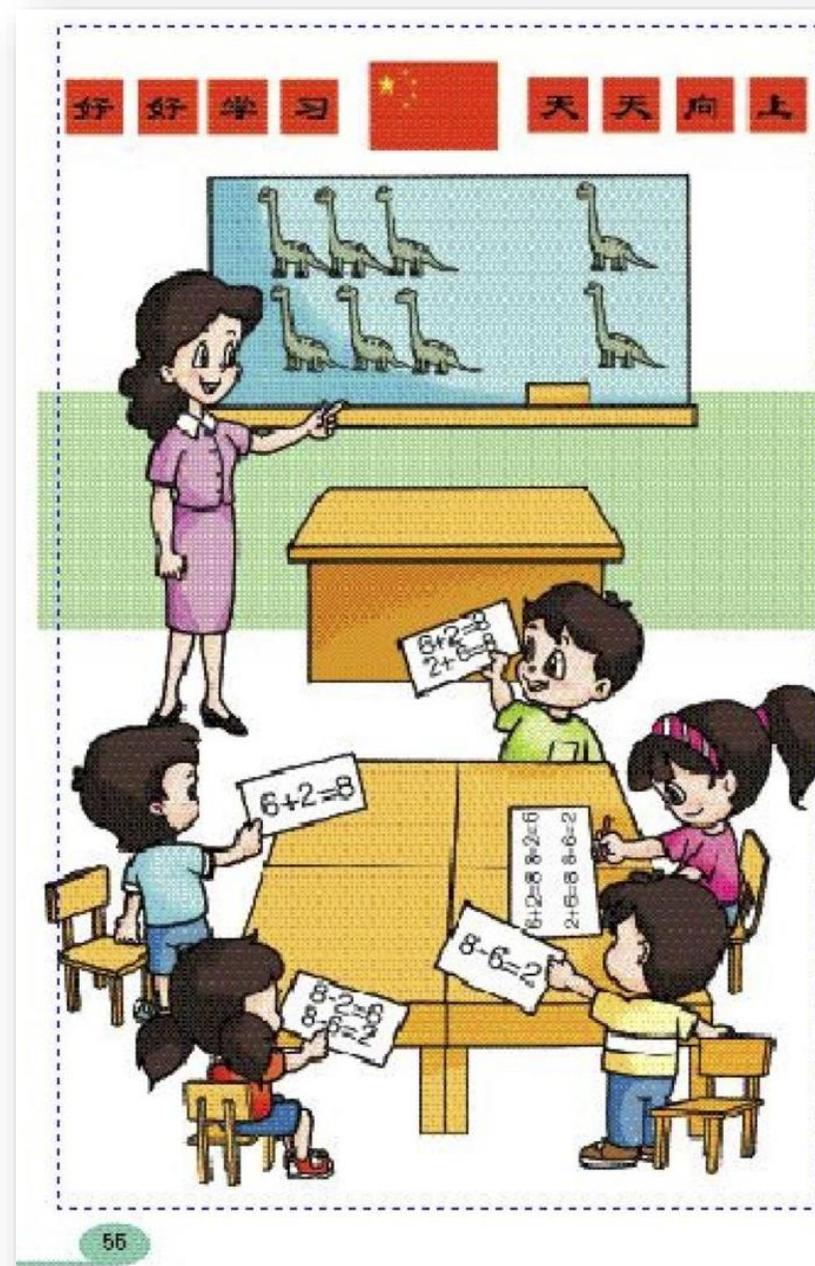
I problemi per immagini

<https://www.percontare.it/guide/percorsi-classe-prima/problemi-con-variazione/>



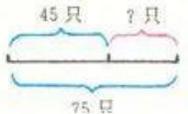
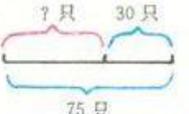
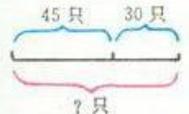
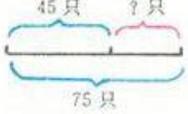
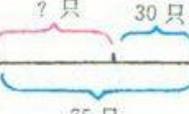
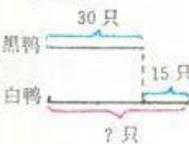
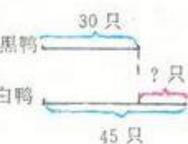
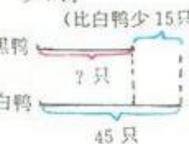
“Quanti bambini vedi? Come li puoi rappresentare con i numeri?”

6 visto come 4 e 2 (4 che giocano con la palla e 2 che giocano con i fiori, oppure 4 femmine e 2 maschi) oppure **6 come 3 e 3** (3 che portano i pantaloni fino alla caviglia e 3 con pantaloni più corti o gonne)



I problemi con variazione in Cina

1. (1) 河里有 45 只白鸭, 30 只黑鸭, 一共有多少只鸭?

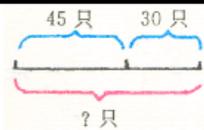
- (2) 河里有白鸭和黑鸭一共 75 只, 其中 45 只是白鸭, 有多少只黑鸭?

- (3) 河里有白鸭和黑鸭一共 75 只, 有 30 只黑鸭, 有多少只白鸭?

2. (1) 河里有 45 只鸭, 游走 30 只, 还剩多少只?

- (2) 河里有 75 只鸭, 游走一些, 还剩 45 只, 游走多少只?

- (3) 河里有 75 只鸭, 游走 30 只, 还剩多少只?

3. (1) 河里有 30 只黑鸭, 白鸭比黑鸭多 15 只 (黑鸭比白鸭少 15 只), 白鸭有多少只?

- (2) 河里有 30 只黑鸭, 45 只白鸭, 白鸭比黑鸭多几只? (黑鸭比白鸭少几只?)

- (3) 河里有 45 只白鸭, 黑鸭比白鸭少 15 只 (白鸭比黑鸭多 15 只), 黑鸭有多少只?


OPMS One Problem Multiple Solutions

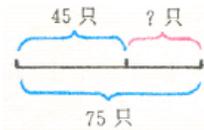
Ripreso dai materiali dell'intervento di Bartolini Bussi in occasione del Seminario Nazionale di ricerca in Didattica della Matematica 2019, si veda <https://www.airdm.org/xxxvi-seminario-nazionale-in-didattica-della-matematica/>

I problemi con variazione in Cina

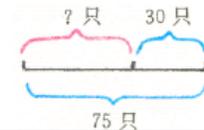
(1) Nello stagno abbiamo 45 anatre bianche, 30 anatre nere, in totale abbiamo quante anatre?



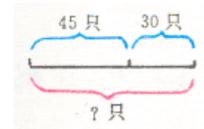
(2) Nello stagno abbiamo anatre bianche e anatre nere in totale 75, tra queste 45 sono anatre bianche, abbiamo quante anatre nere?



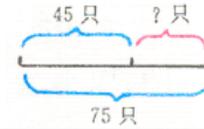
(3) Nello stagno abbiamo anatre bianche e anatre nere in totale 75, abbiamo 30 anatre nere, abbiamo quante anatre bianche?



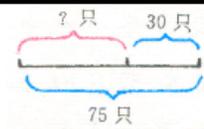
(1) Nello stagno abbiamo un gruppo di anatre, ne nuotano via 30, ancora ne restano 45. Questo gruppo di anatre ne ha quante?



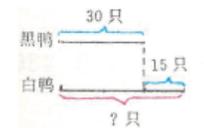
(2) Nello stagno abbiamo 75 anatre, nuotano via alcune, ancora ne restano 45, sono nuotate via quante?



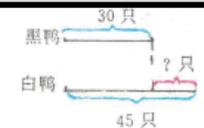
(3) Nello stagno abbiamo 75 anatre, ne nuotano via 30, ancora ne restano quante?



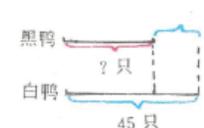
(1) Nello stagno abbiamo 30 anatre nere, anatre bianche rispetto anatre nere maggiore di 15 unità (anatre nere rispetto anatre bianche minore di 15 unità), anatre bianche quante ne abbiamo?



(2) Nello stagno abbiamo 30 anatre nere, 45 anatre bianche, anatre bianche rispetto anatre nere di quante unità maggiore? (anatre nere rispetto anatre bianche di quante unità minore?)



(3) Nello stagno abbiamo 45 anatre bianche, anatre nere rispetto anatre bianche minore di 15 unità (anatre bianche rispetto anatre nere maggiore di 15 unità), anatre nere quante ne abbiamo?

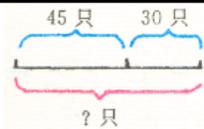


OPMS
One
Problem
Multiple
Solutions

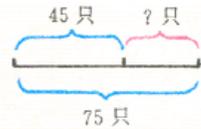
Ripreso dai materiali dell'intervento di Bartolini Bussi in occasione del Seminario Nazionale di ricerca in Didattica della Matematica 2019, si veda <https://www.airdm.org/xxxvi-seminario-nazionale-in-didattica-della-matematica/>

I problemi con variazione in Cina

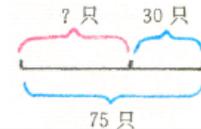
(1) Nello stagno abbiamo 45 anatre bianche, 30 anatre nere, in totale abbiamo quante anatre?



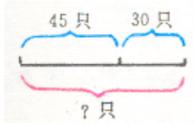
(2) Nello stagno abbiamo anatre bianche e anatre nere in totale 75, tra queste 45 sono anatre bianche, abbiamo quante anatre nere?



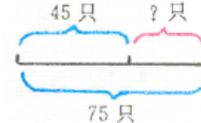
(3) Nello stagno abbiamo anatre bianche e anatre nere in totale 75, abbiamo 30 anatre nere, abbiamo quante anatre bianche?



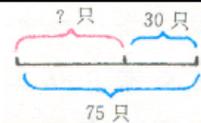
(1) Nello stagno abbiamo un gruppo di anatre, ne nuotano via 30, ancora ne restano 45. Questo gruppo di anatre ne ha quante?



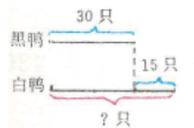
(2) Nello stagno abbiamo 75 anatre, nuotano via alcune, ancora ne restano 45, sono nuotate via quante?



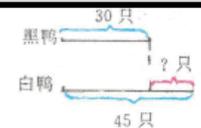
(3) Nello stagno abbiamo 75 anatre, ne nuotano via 30, ancora ne restano quante?



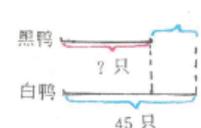
(1) Nello stagno abbiamo 30 anatre nere, anatre bianche rispetto anatre nere maggiore di 15 unità (anatre nere rispetto anatre bianche minore di 15 unità), anatre bianche quante ne abbiamo?



(2) Nello stagno abbiamo 30 anatre nere, 45 anatre bianche, anatre bianche rispetto anatre nere di quante unità maggiore? (anatre nere rispetto anatre bianche di quante unità minore?)



(3) Nello stagno abbiamo 45 anatre bianche, anatre nere rispetto anatre bianche minore di 15 unità (anatre bianche rispetto anatre nere maggiore di 15 unità), anatre nere quante ne abbiamo?



Combina
Parte-parte-tutto

Cambia

Confronta

Classificazione dei problemi di addizione e sottrazione su base semantica (da Sabena, Ferri, Martignone e Robotti, 2019, p. 49, che riprendono Carpenter e Moser, 1984)

1. «*Problemi di cambio o trasformazione*, in cui è previsto che un'azione modifichi la situazione in modo dinamico»
2. «*problemi di combinazione*, che considera la relazione tutto-parte in un insieme statico
3. «*problemi di confronto*, in cui si confrontano due insiemi statici disgiunti e quindi anche distinti»
4. «*problemi di uguaglianza*, in cui è prevista un'azione per riportare due insiemi dinamici disgiunti e distinti ad avere lo stesso numero di elementi»

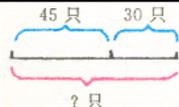
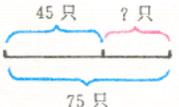
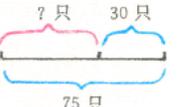
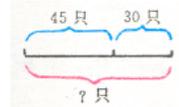
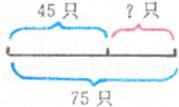
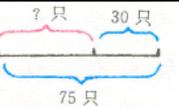
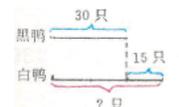
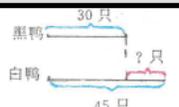
Ripreso dai materiali dell'intervento di Bartolini Bussi in occasione del Seminario Nazionale di ricerca in Didattica della Matematica 2019, si veda <https://www.airdm.org/xxxvi-seminario-nazionale-in-didattica-della-matematica/>

I problemi con variazione in Cina

MPOS Multiple Problems One Solution

varying presentations – exercises

Ripreso dai materiali dell'intervento di Bartolini Bussi in occasione del Seminario Nazionale di ricerca in Didattica della Matematica 2019, si veda <https://www.airdm.org/xxvi-seminario-nazionale-in-didattica-della-matematica/>

MPOS 1 addizione	MPOS 2 sottrazione	MPOS 3 sottrazione
<p>(1) Nello stagno abbiamo 45 anatre bianche, 30 anatre nere, in totale abbiamo quante anatre?</p> 	<p>(2) Nello stagno abbiamo anatre bianche e anatre nere in totale 75, tra queste 45 sono anatre bianche, abbiamo quante anatre nere?</p> 	<p>(3) Nello stagno abbiamo anatre bianche e anatre nere in totale 75, abbiamo 30 anatre nere, abbiamo quante anatre bianche?</p> 
<p>(1) Nello stagno abbiamo un gruppo di anatre, ne nuotano via 30, ancora ne restano 45. Questo gruppo di anatre ne ha quante?</p> 	<p>(2) Nello stagno abbiamo 75 anatre, nuotano via alcune, ancora ne restano 45, sono nuotate via quante?</p> 	<p>(3) Nello stagno abbiamo 75 anatre, ne nuotano via 30, ancora ne restano quante?</p> 
<p>(1) Nello stagno abbiamo 30 anatre nere, anatre bianche rispetto anatre nere maggiore di 15 unità (anatre nere rispetto anatre bianche minore di 15 unità), anatre bianche quante ne abbiamo?</p> 	<p>(2) Nello stagno abbiamo 30 anatre nere, 45 anatre bianche, anatre bianche rispetto anatre nere di quante unità maggiore? (anatre nere rispetto anatre bianche di quante unità minore?)</p> 	<p>(3) Nello stagno abbiamo 45 anatre bianche, anatre nere rispetto anatre bianche minore di 15 unità (anatre bianche rispetto anatre nere maggiore di 15 unità), anatre nere quante ne abbiamo?</p> 

Come introdurli in Italia?

Obiettivi:

- Visione relazionale dell'aritmetica
- Avvio al pensiero algebrico

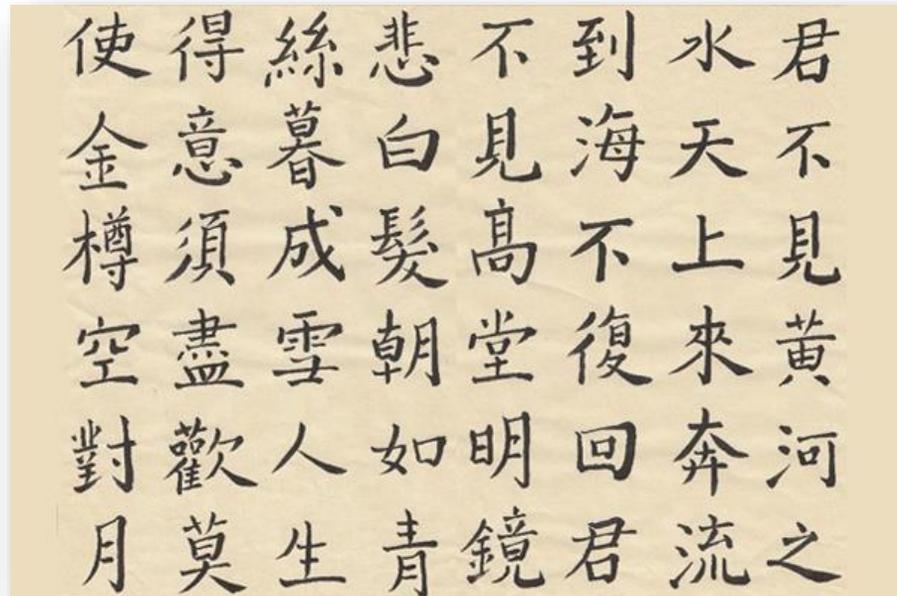
Dal libro di testo cinese:
2° grado, scuola primaria

<p>(1) Nello stagno abbiamo 45 anatre bianche, 30 anatre nere, in totale abbiamo quante anatre?</p>	<p>(2) Nello stagno abbiamo anatre bianche e anatre nere in totale 75, tra queste 45 sono anatre bianche, abbiamo quante anatre nere?</p>	<p>(3) Nello stagno abbiamo anatre bianche e anatre nere in totale 75, abbiamo 30 anatre nere, abbiamo quante anatre bianche?</p>
<p>(1) Nello stagno abbiamo un gruppo di anatre, ne nuotano via 30, ancora ne restano 45. Questo gruppo di anatre ne ha quante?</p>	<p>(2) Nello stagno abbiamo 75 anatre, nuotano via alcune, ancora ne restano 45, sono nuotate via quante?</p>	<p>(3) Nello stagno abbiamo 75 anatre, ne nuotano via 30, ancora ne restano quante?</p>
<p>(1) Nello stagno abbiamo 30 anatre nere, anatre bianche rispetto anatre nere maggiore di 15 unità (anatre nere rispetto anatre bianche minore di 15 unità), anatre bianche quante ne abbiamo?</p>	<p>(2) Nello stagno abbiamo 30 anatre nere, 45 anatre bianche, anatre bianche rispetto anatre nere di quante unità maggiore? (anatre nere rispetto anatre bianche di quante unità minore?)</p>	<p>(3) Nello stagno abbiamo 45 anatre bianche, anatre nere rispetto anatre bianche minore di 15 unità (anatre bianche rispetto anatre nere maggiore di 15 unità), anatre nere quante ne abbiamo?</p>

Ripreso dai materiali dell'intervento di Alessandro Ramploud «Variation problem - the problem of cultural transposition – an example» in occasione della conferenza internazionale ICME, Shanghai 2020

La traduzione

differenze



scrittura ideogrammatica
immagine che si riferisce alla cosa
reale

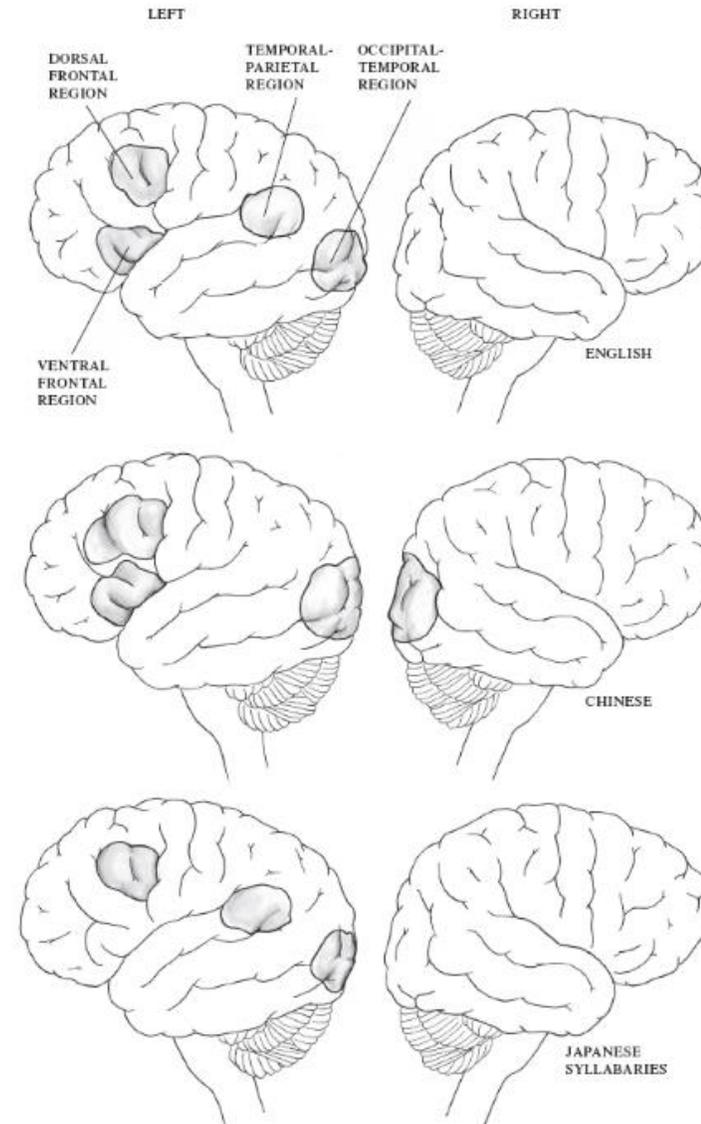
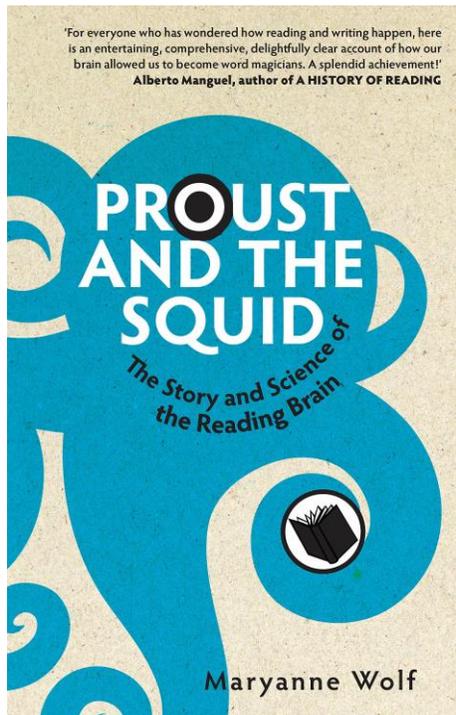
α β γ δ ε ζ η θ
ι κ λ μ ν ξ ο π
ρ σ τ υ φ χ ψ ω
Α Β Γ Δ Ε Ζ Η Θ
Ι Κ Λ Μ Ν Ξ Ο Π
Ρ Σ Τ Υ Φ Χ Ψ Ω

scrittura fonetica
non ha un collegamento diretto con la
cosa reale (arbitrarietà)

Ripreso dai materiali dell'intervento di Alessandro Ramploud «Variation problem - the problem of cultural transition – an example» in occasione della conferenza internazionale ICME, Shanghai 2020

La traduzione

Differenze nelle mappe neurali



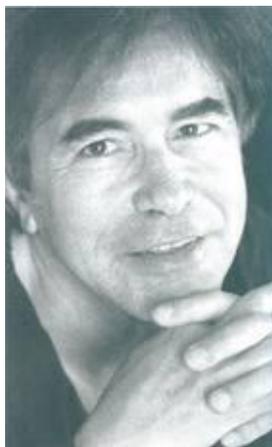
Functional Magnetic Resonance (fMRI): imaging of the brain that reads (Bolger D., Perfetti C., Shneider W. 2005)

Ripreso dai materiali dell'intervento di Alessandro Ramploud «Variation problem - the problem of cultural transposition – an example» in occasione della conferenza internazionale ICME, Shanghai 2020

Una prospettiva filosofica

Non si tratta di filosofia comparata, *della messa in parallelo delle diverse concezioni, bensì di un dialogo filosofico dove ogni pensiero, nel farsi incontro all'altro, si interroga sul proprio impensato.*

(Jullien, 2008)

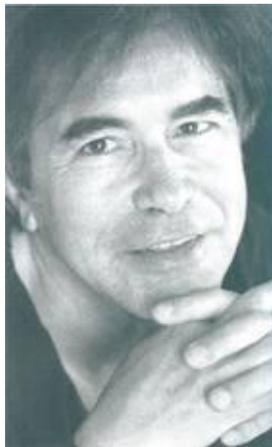


François Jullien

Ripreso dai materiali dell'intervento di Ramploud e Mellone in occasione del Seminario Nazionale di ricerca in Didattica della Matematica 2019, si veda <https://www.airdm.org/xxxvi-seminario-nazionale-in-didattica-della-matematica/>

Una prospettiva filosofica

Noi crediamo che non si tratti di didattica della matematica comparata, della messa in parallelo di diverse concezioni (anche per le differenze dei sistemi scolastici), ma vorremmo tentare di aprire un dialogo traspositivo fra le diverse didattiche della matematica, che nel farsi l'una incontro all'altra, *si interrogano sul proprio impensato*.

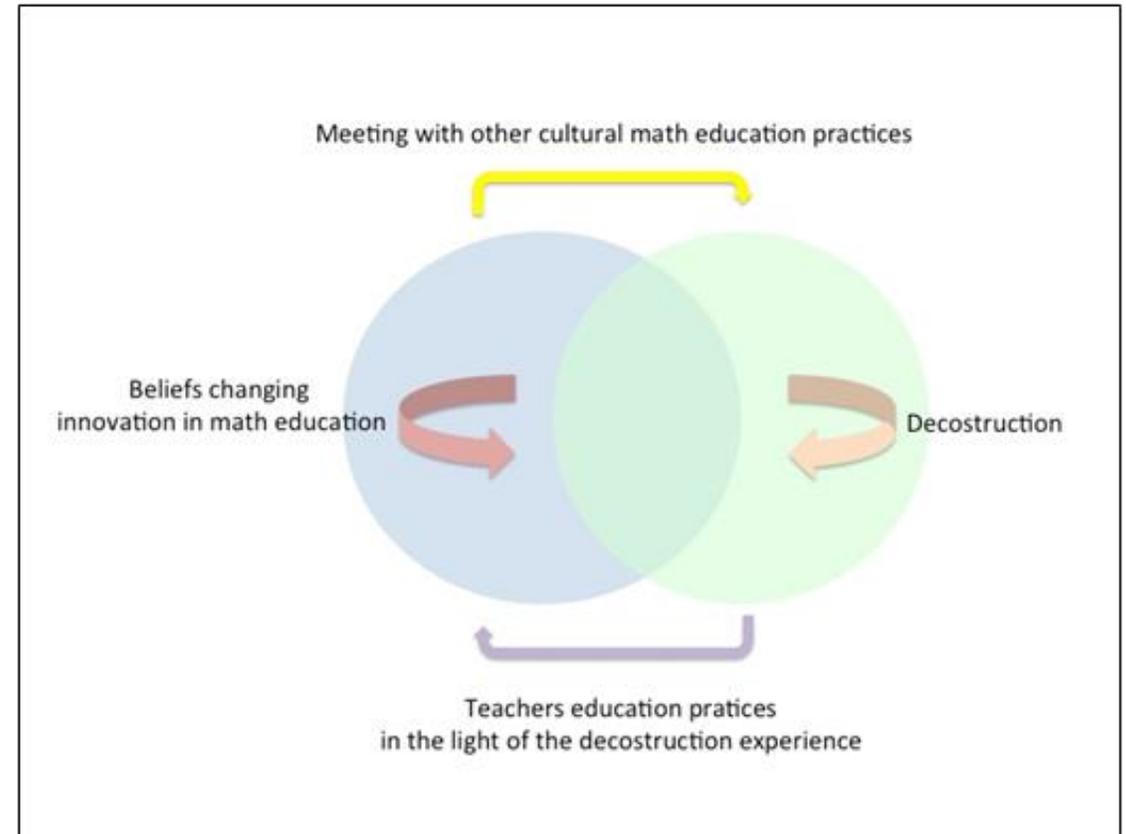


Rileggendo François Jullien

Ripreso dai materiali dell'intervento di Ramploud e Mellone in occasione del Seminario Nazionale di ricerca in Didattica della Matematica 2019, si veda <https://www.airdm.org/xxxvi-seminario-nazionale-in-didattica-della-matematica/>

Da un punto di vista operativo...

- 1) Contatto con pratiche didattiche di altri contesti culturali.
- 2) Decostruzione (intesa come critica radicale che coinvolge fattori linguistici, fattori geografici, fattori relativi ai sistemi «valoriali») per ripensare alle intenzionalità educative di quelle pratiche didattiche.
- 3) Pratiche di formazione insegnanti.
- 4) Cambiamenti nelle convinzioni educative e innovazione didattica.



Ripreso dai materiali dell'intervento di Ramploud e Mellone in occasione del Seminario Nazionale di ricerca in Didattica della Matematica 2019, si veda <https://www.airdm.org/xxxvi-seminario-nazionale-in-didattica-della-matematica/>

Un esempio di trasposizione culturale in Italia

Per approfondimenti si veda Mellone,
Ramploud, Di Paola, Martignone (2019)

Le scelte progettuali del
docente e del ricercatore

Scelte nel processo di
trasposizione:

- Focus su una sola riga con tre problemi a parole
- Traduzione linguistica
- Nessun riferimento esplicito a nessuna equazione figurale

- comprensione dell'incommensurabilità della cultura dell'altro
- possibilità di ripensare il proprio *impensato*
- consapevolezza riguardo alle profonde differenze culturali tra il contesto culturale originario (Cina) e quello nuovo (Italia)

Ripreso dai materiali dell'intervento di Alessandro Ramploud «*Variation problem - the problem of cultural transposition – an example*» in occasione della conferenza internazionale ICME, Shanghai 2020

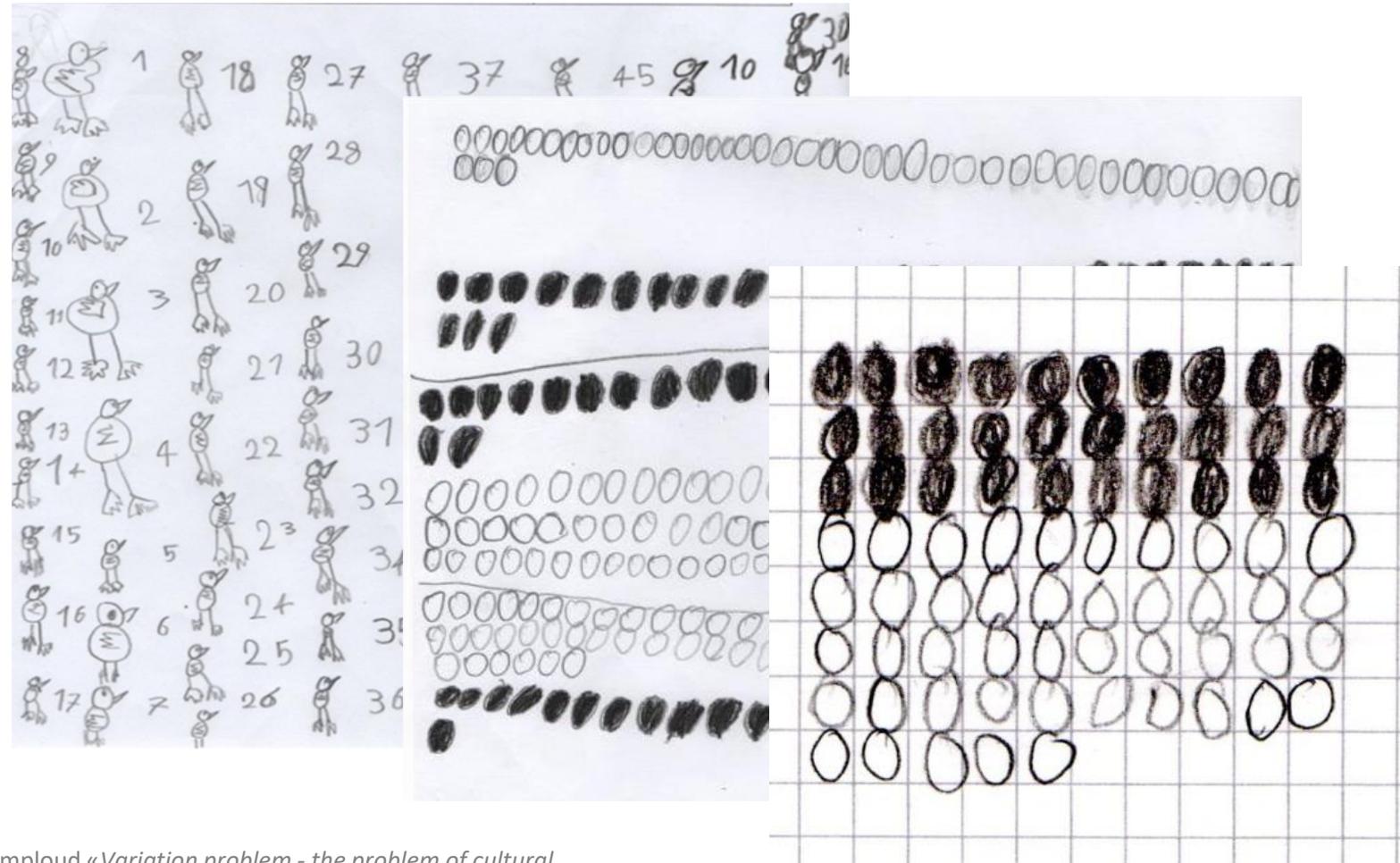
Un esempio di trasposizione culturale in Italia

Obiettivi formativi:

- **Rappresentazione**
- **Simbolizzazione**

Raggiunti attraverso

**un percorso di
astrazione progressiva**



Ripreso dai materiali dell'intervento di Alessandro Ramploud «*Variation problem - the problem of cultural transposition – an example*» in occasione della conferenza internazionale ICME, Shanghai 2020

Un esempio di trasposizione culturale in Italia

differenze

1. (1) 河里有 45 只白鸭, 30 只黑鸭, 一共有多少只鸭?

45 只 30 只

? 只

≠

(1) Nello stagno abbiamo 45 anatre bianche, 30 anatre nere, in totale abbiamo quante anatre?



Ripreso dai materiali dell'intervento di Alessandro Ramploud «Variation problem - the problem of cultural transposition – an example» in occasione della conferenza internazionale ICME, Shanghai 2020

Ripreso dai materiali dell'intervento di Ramploud e Mellone in occasione del Seminario Nazionale di ricerca in Didattica della Matematica 2019, si veda <https://www.airdm.org/xxxvi-seminario-nazionale-in-didattica-della-matematica/>

例 11 先解答,再说一说横着、竖着每组三道题有什么联系?

1. (1) 河里有 45 只白鸭, 30 只黑鸭, 一共有多少只鸭?
 (2) 河里有白鸭和黑鸭一共 75 只, 其中 45 只是白鸭, 有多少只黑鸭?
 (3) 河里有白鸭和黑鸭一共 75 只, 有 30 只黑鸭, 有多少只白鸭?

2. (1) 河里有 45 只白鸭, 游走 30 只, 还剩多少只?
 (2) 河里有 75 只鸭, 游走 30 只, 还剩多少只?
 (3) 河里有 75 只鸭, 游走 30 只, 还剩多少只?

3. (1) 河里有 30 只黑鸭, 白鸭比黑鸭多 15 只 (黑鸭比白鸭少 15 只), 白鸭有多少只?
 (2) 河里有 30 只黑鸭, 45 只白鸭, 白鸭比黑鸭多几只? (黑鸭比白鸭少几只?)
 (3) 河里有 45 只白鸭, 黑鸭比白鸭少 15 只 (白鸭比黑鸭多 15 只), 黑鸭有多少只?

ripensare i nostri impensati



rubricazione

astrazione

I problemi con variazione in

Le guide presentano delle Trasposizioni Culturali di problemi con variazione in 2 punti:

- Guide di classe I – in relazione alle operazioni di addizione-sottrazione (<https://www.percontare.it/guide/percorsi-classe-prima/problemi-con-variazione/>)
- Guide di classe III – in relazione alle operazioni di moltiplicazione-divisione (<https://www.percontare.it/guide/classe-terza/divisioni-con-resto-0/divisioni-con-resto-0-fase-2/>)
- Le trasposizioni sono diverse (e non sono le uniche possibili!) a seconda degli obiettivi

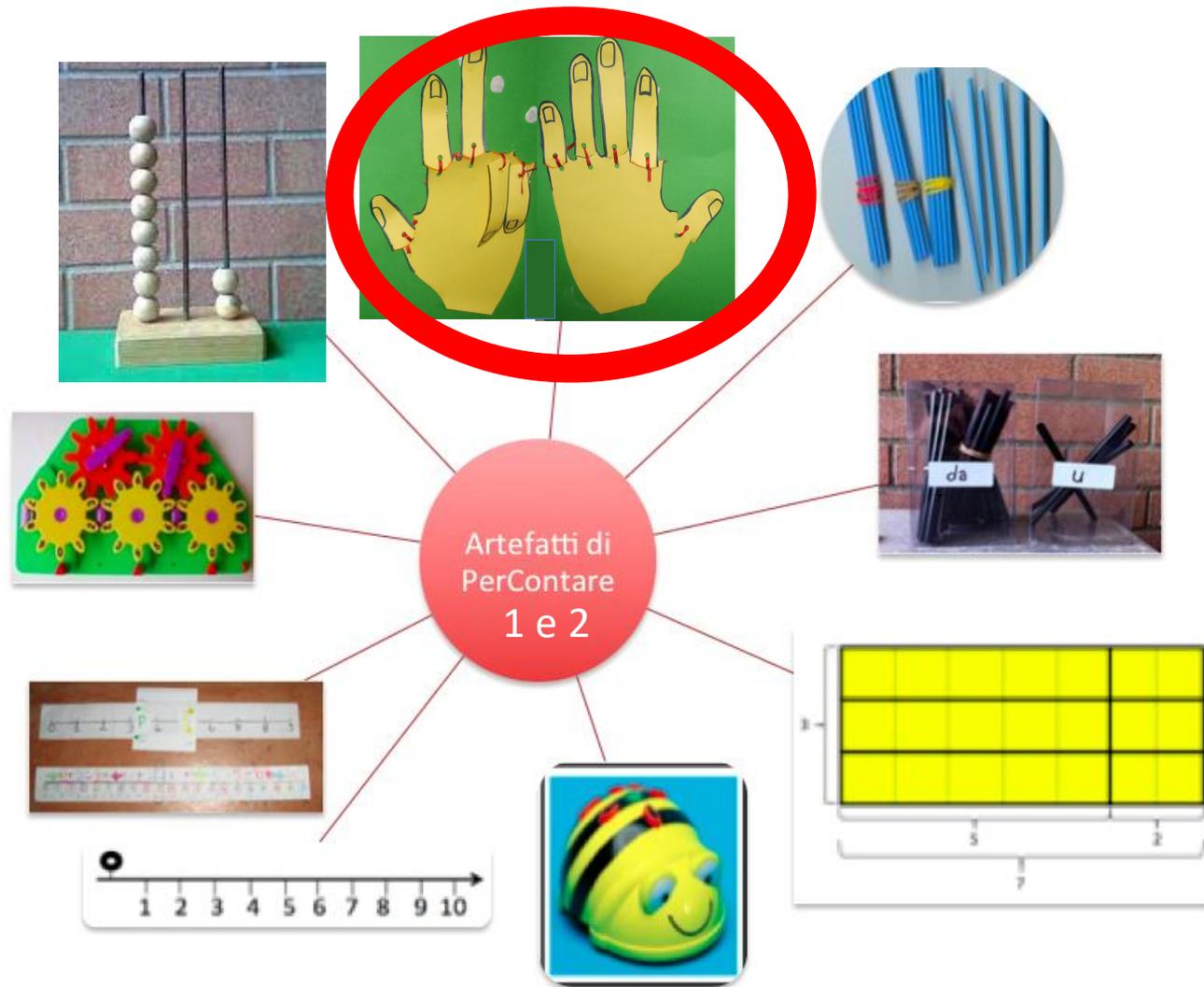
Lavoro sulla Complementarità

<https://www.percontare.it/wp-content/uploads/2019/07/INDICE-GRAFICO-DEI-PERCORSI.pdf>

INDICE GRAFICO DEI PERCORSI

BUONE ABITUDINI	PRIME ATTIVITA'	https://www.percontare.it/guide/percorsi-classe-prima/complementarieta-numeri/			
		COMPLEMENTARIETA' DEI NUMERI	Introduzione numeri 1-9		
			I numeri con le mani		
			I numeri con contamani		
			Complementarietà gioco		
			Introduzione scomposizioni		
			Scomposizioni numeri 1-9		
			Introduzione 10		
			Gioco per la decina		
			Introduzione 10 con linea num.		
	Rappresentaz. Numeri con mani				
	Giocchi mani e contamani				
	PROBLEMI CON VARIAZIONE	COMPLEMENTARIETA' DEI NUMERI	Relazione complementarità		
			Linea num. finestra scorrevole		
			Confrontare i numeri		
			Bee-bot e linea numeri		
			Gioco con pascalina		
			NOTAZIONE DECIMALE POSIZIONALE	COMPLEMENTARIETA' DEI NUMERI	Introduzione 10
					Gioco per la decina
					Introduz. 10 con linea num.
Rappres. numeri cannuce					
Confronto numeri					
Cannuce e scatole trasp.					
Scopriamo pascalina					
Approfondiamo pascalina					
Gioco pascalina					
Intro abaco e b.abaco					
Lavoro con abaco o b.abaco					
AVVIO AL CALCOLO	BEE-BOT E SPAZIO	Giocchi mani e contamani			
		Gioco intro segno +			
		Gioco intro segno -			
		Avanti-indietro linea num.			
		Pari e dispari			
		Calcolo a mente			
		Add. e sott. con pascalina			
		Lavoro con abaco o b.abaco			

Per la prima parte dell'anno insistiamo particolarmente su complementarità rispetto al 5



Conta Dita



<https://www.percontare.it/guide/percorsi-classe-prima/complementarieta-neri/i-neri-con-contadita/>



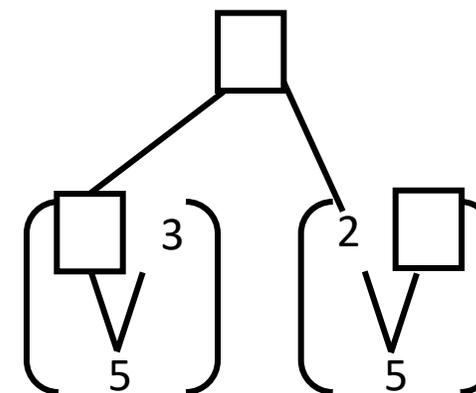
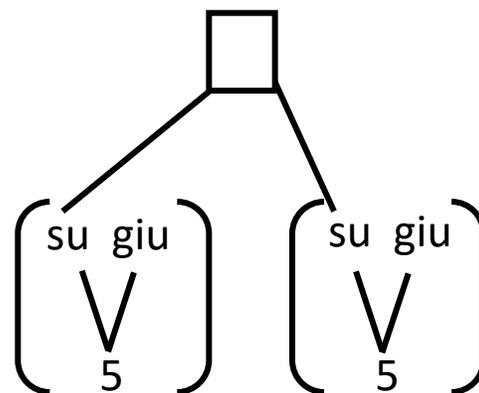
Relazioni di complementarità (rispetto a 5)

Situazione Generale

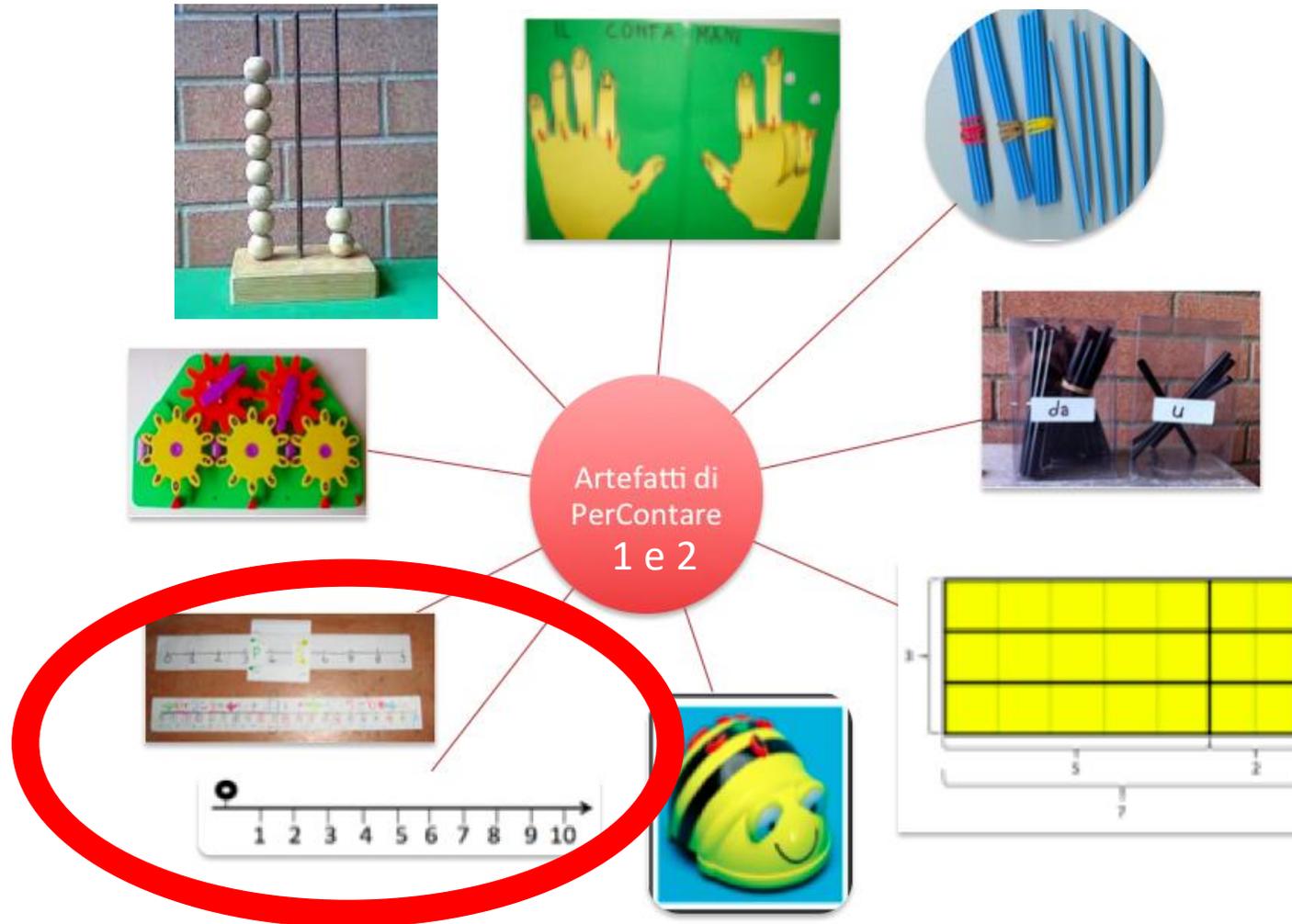
“Tre dita di una mano abbassate, e due dell’altra sollevate.”

Numero di dita sollevate su entrambe le mani

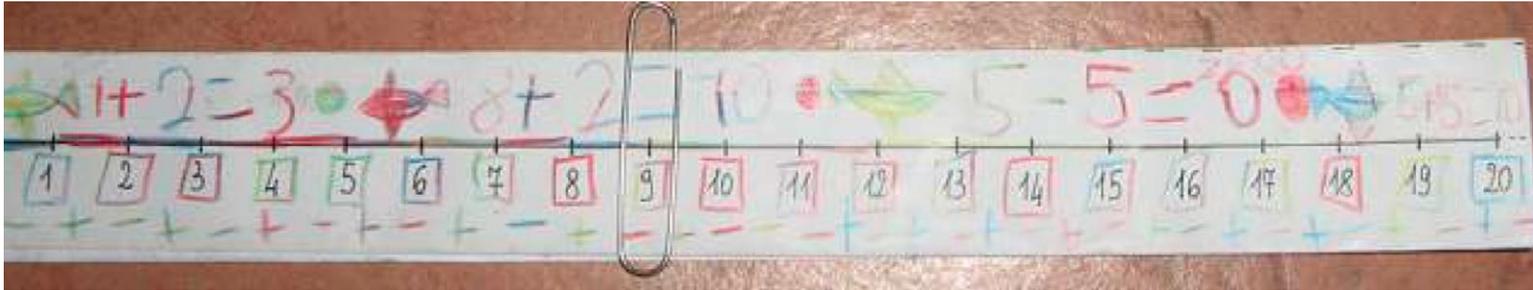
Dita sollevate e abbassate su ciascuna mano



<https://www.percontare.it/guide/percorsi-classe-prima/complementarieta-numeri/rappresentazione-numeri-con-mani/>



Complementarità sulla linea dei numeri



- 1) Se ho nella finestra il numero 6 (cioè se parto dal numero 6) dove arrivo se sposto la finestra in avanti di 2?
- 2) Se ho nella finestra il numero 5 (cioè se parto dal numero 5) dove arrivo se sposto la finestra indietro di 3?
- 3) Come devo spostare la finestra se parto dal numero 2 e voglio arrivare al numero 6?
- 4) Come devo spostare la finestra se parto dal numero 10 e voglio arrivare al numero 6?

<https://www.percontare.it/guide/percorsi-classe-prima/complementarieta-numeri/linea-numeri-a-finestra-scorrevole/>

Complementarità con la linea dei numeri (in verticale)

Disponendo i numeri sulle scale (nella scuola, in cortile, sulle gradinate di un campo di atletica...) si possono proporre “giochi” di potenziamento per bambini con difficoltà.



Mettiti sul gradino 5.



Mettiti sul gradino 5.



Mettiti sul gradino 5.



Mettiti sul gradino 5.



Mettiti sul gradino 5.



Mettiti sul gradino 5.



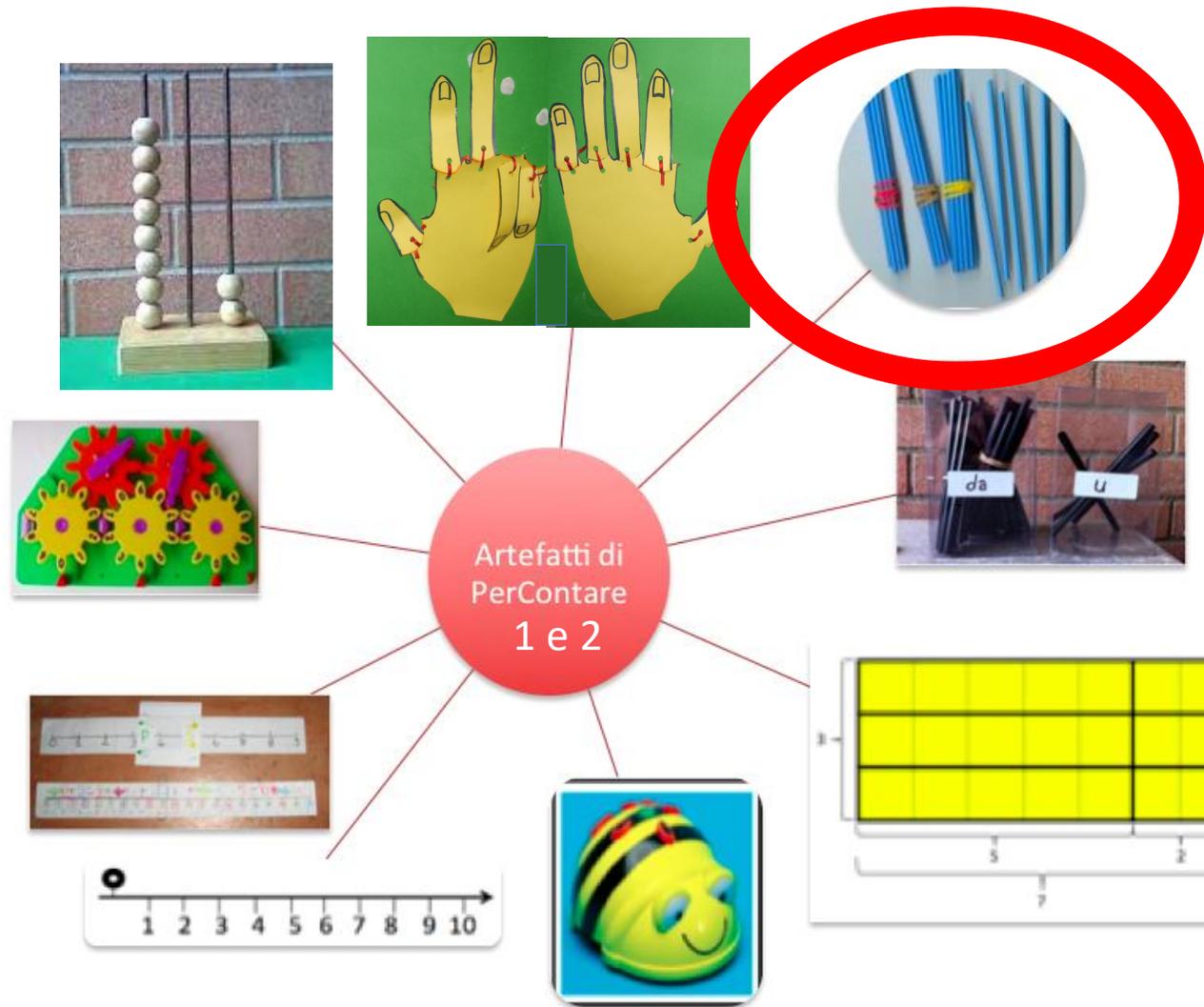
Se devi andare all'8 devi
andare su o giù? e di
quanto?



Se devi andare all'8 devi
andare su o giù? e di
quanto?

Su.
Di tre.





Complementarità con le cannucce



I problemi con variazione in



Possiamo rappresentare questi problemi con il diagramma rettangolo?

Vorrei disporre 6 righe di cannuce, ognuna delle righe dovrà essere formata da 4 cannuce. Quante cannuce mi servono?

Vorrei disporre 24 cannuce in righe. Ognuna delle righe dovrà essere formata da 4 cannuce. Quante righe di cannuce devo fare?

Vorrei disporre 24 cannuce in 6 righe. Da quante cannuce dovrà essere formata ognuna delle righe?

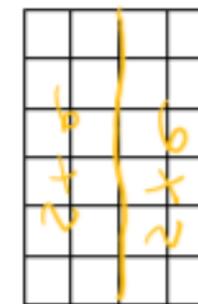
Incolla qui sotto il diagramma rettangolo

Guide di classe III (<https://www.percontare.it/guide/classe-terza/divisioni-con-resto-0/divisioni-con-resto-0-fase-2/>)

Obiettivi

- Introdurre la divisione come operazione complementare della moltiplicazione
- Lavoro ulteriore sul diagramma rettangolo come rappresentazione
- Esplorazione **simultanea** di una tripletta di problemi

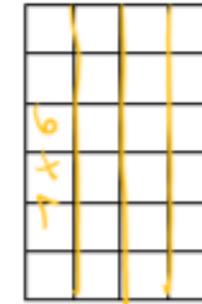
GRUPPO 5



1



2



3

I problemi con variazione in



Scrivete tutte le operazioni che avete rappresentato con il diagramma rettangolo

Cosa avete scoperto?

Guide di classe III (<https://www.percontare.it/guide/classe-terza/divisioni-con-resto-0/divisioni-con-resto-0-fase-2/>)

Obiettivi

- Introdurre la divisione come operazione complementare della moltiplicazione
- Lavoro ulteriore sul diagramma rettangolo come rappresentazione
- Esplorazione simultanea di una tripletta di problemi
- Passaggio ad una formalizzazione del ragionamento in forma simbolica

Operazioni:	$24-1 \times 6-1 \times 6-1 \times 6-1 \times 6=0$	$24:6=4$
	$24-6-6-6-6=0$	$24:4=6$
	$24-24=0$	$6+6+6+6=24$
	$24-4 \times 1-4 \times 1-4 \times 1-4 \times 1-4 \times 1-4 \times 1=0$	
	$24-4-4-4-4-4-4=0$	
	$6 \times 4=2 \times 3+2 \times 3+2 \times 3+2 \times 3=24$	

Scoperta: tutti i problemi hanno gli stessi numeri 24/6/4; per completare un diagramma scomposto serve la divisione (approfondirò domani).

I problemi con variazione in PerContare

Libro *Matematica... PerContare 2*

Obiettivi

- Introdurre la divisione come operazione complementare della moltiplicazione
- Lavoro ulteriore sul diagramma rettangolo come rappresentazione
- Esplorazione simultanea di una tripletta di problemi
- Passaggio ad una formalizzazione del ragionamento in forma simbolica

ANCORA PROBLEMI

GRUPPO

RISOLVETE QUESTI PROBLEMI. POTETE AIUTARVI CON DEI DISEGNI.

NIKA ABITA IN UN PALAZZO CHE HA SULLA FACCIATA 56 FINESTRE. NIKA MI HA DETTO CHE IL SUO PALAZZO HA 8 PIANI. POTETE AIUTARMI A CAPIRE QUANTE FINESTRE CI SONO SU OGNI PIANO?	NIKA ABITA IN UN PALAZZO CHE HA SULLA FACCIATA 56 FINESTRE. NIKA MI HA DETTO CHE IL SUO PALAZZO HA 7 FINESTRE PER OGNI PIANO. POTETE AIUTARMI A CAPIRE QUANTI PIANI CI SONO?	NIKA ABITA IN UN PALAZZO CHE HA 7 FINESTRE PER OGNI PIANO. NIKA MI HA DETTO CHE IL SUO PALAZZO HA 8 PIANI. POTETE AIUTARMI A CAPIRE QUANTE FINESTRE CI SONO SULLA FACCIATA?
ORA SPIEGATE IL RAGIONAMENTO IN "MATEMATICHESE".	ORA SPIEGATE IL RAGIONAMENTO IN "MATEMATICHESE".	ORA SPIEGATE IL RAGIONAMENTO IN "MATEMATICHESE".

96

GRUPPO

IN OGNI TAVOLO CI SONO 8 BAMBINI. VOGLIAMO CHE LA SOMMA DEI FUSILLI SUL TAVOLO SIA 96. QUANTI FUSILLI SI POSSONO DARE A CIASCUN BAMBINO? RICORDATEVI CHE TUTTI I BAMBINI DEVONO AVERE LO STESSO NUMERO DI FUSILLI.	IN OGNI TAVOLO C'È LO STESSO NUMERO DI BAMBINI. OGNI BAMBINO HA 12 FUSILLI. LA SOMMA DEI FUSILLI SUL TAVOLO È 96. QUANTI BAMBINI CI SONO?	IN OGNI TAVOLO CI SONO 8 BAMBINI. OGNI BAMBINO HA 12 FUSILLI. QUANTI FUSILLI CI SONO, COMPLESSIVAMENTE, SU OGNI TAVOLO?
ORA SPIEGATE IL RAGIONAMENTO IN "MATEMATICHESE".	ORA SPIEGATE IL RAGIONAMENTO IN "MATEMATICHESE".	ORA SPIEGATE IL RAGIONAMENTO IN "MATEMATICHESE".

99

Sul segno di =

Il senso del segno di =

Abituare i bambini fin dalla classe I anche a scritte in cui il segno di uguale non corrisponde al «fa»

GRUPPO

LIPING HA COMPLETATO LA TABELLA CHE HA DISEGNATO SUL SUO QUADERNO COSÌ:

NUMERO PREVISTO	NUMERO SUI DADI	VINCITE / PERDITE
$3 + 5$	$2 + 6$	$3 + 5 = 2 + 6$

$19 = \text{👤} + 7$

L'IMPRONTA COPRE IL NUMERO _____

PERCHÉ, SECONDO TE? _____

GRUPPO

AIUTATE NIKA A COMPLETARE LA TABELLA CHE HA DISEGNATO SUL SUO QUADERNO. SE VOLETE POTETE FARE UN CONTROLLO CONTANDO SULLE DITA:

BIRILLI INIZIALI	BIRILLI CADUTI	BIRILLI RIMASTI IN PIEDI
10		

ADESSO COMPLETATE QUESTA RAPPRESENTAZIONE CON I NUMERI IN CIFRE:

QUANDO HA VISTO LA PARTITA DI NIKA, LIPING HA SCRITTO $6 = 10 - 4$ SUL SUO QUADERNO. COSA SIGNIFICA QUESTA SCRITTURA SECONDO VOI?

A STEFANO L'IDEA DI LIPING È PIACIUTA MOLTISSIMO! AIUTATELO A COMPLETARE IL SUO SCHEMA CON ALTRE SCRITTURE MATEMATICHE, IN MODO CHE SIANO TUTTE DIVERSE.

SCRITTURA DI LIPING		
$\underline{\quad} = 10 - \underline{\quad}$	$\underline{\quad} - \underline{\quad} = 4$	$\underline{\quad} = \underline{\quad} + 6$

89

Il senso del segno di =

Introdurre consegne in cui sia necessario ragionare sull'uguaglianza dei due membri

Il simbolo di = in matematica

(...) = (...)



↑ ↑

Ciò che scriviamo a sinistra di = dev'essere uguale a ciò che scriviamo a destra, e viceversa

PerContare

Fondazione ASPPI ONLUS

Università di Pisa

Fondazione Compagnia di San Paolo

Fondazione Scuola

Video di approfondimento alla pagina

<https://www.percontare.it/guide/classe-quarta/divisione-canadese-ottimizzata/>

ADESSO PROVA TU AD AIUTARE CLAUDIO:
SE HA UNA BILANCIA CON QUESTI DUE PESETTI...



... E HA A DISPOSIZIONE QUESTI ALTRI PESETTI:



QUALI PESI PUÒ METTERE SULL'ALTRO PIATTO DELLA BILANCIA PER FARLA STARE IN EQUILIBRIO?
COMPLETA LA BILANCIA QUI SOTTO AFFINCHÉ SIA, SECONDO TE, IN EQUILIBRIO:

CONSEGNA 8

NELL'ESERCIZIO PRECEDENTE GUENDALINA HA SCRITTO IN "MATEMATICHESE":

$$2 + 2 + 1 + 10 + 5 = 20 + 5$$

SEI D'ACCORDO CON GUENDALINA O NO? _____

SE SEI D'ACCORDO, SPIEGA PERCHÉ.

SE NON SEI D'ACCORDO, SPIEGA PERCHÉ E PROVA A SCRIVERE NELLO SPAZIO QUI SOTTO COME MODIFICHERESTI TU L'UGUAGLIANZA.

_____ = 20 + 5

135

Il senso del segno di =

La scrittura del risultato della divisione euclidea è un'ottima occasione per ragionare in questo senso!

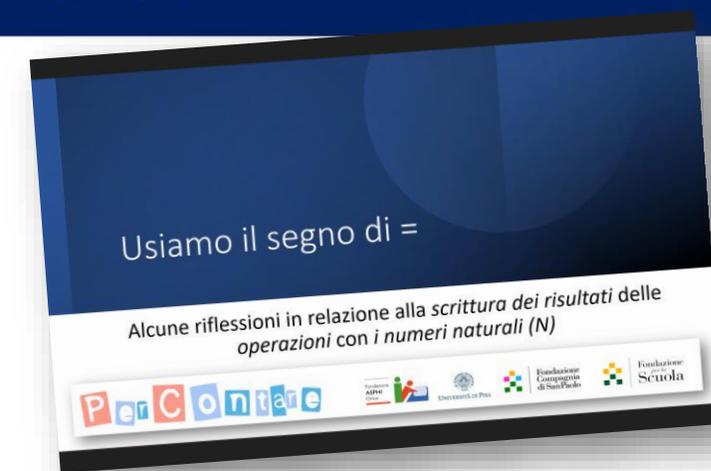
$$143 : 5 \times 28 \text{ r } 3$$

Ci troviamo di fronte ad una scrittura priva di senso matematico perché $143 : 5$ non è uguale a $28 \text{ r } 3$

Che fare?

$$143 = 5 \cdot 28 + 3$$

Video di approfondimento alla pagina <https://www.percontare.it/guide/classe-quarta/divisione-canadese-ottimizzata/>



Possibili «ponti»

Esempio 1:
focus sul simbolo di uguaglianza

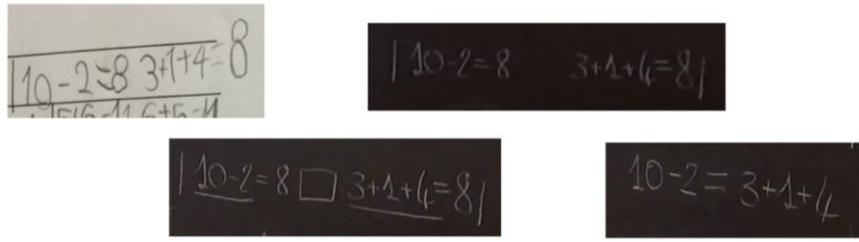
Da una sperimentazione condotta in 4 classi prime di scuola primaria

Adattamento, realizzato nell'ambito del progetto FaSMEd, dell'attività ArAl "Mascherine" attraverso la creazione di 3 schede di lavoro

L'esempio che mostrerò si riferisce alla discussione che ha seguito il lavoro a coppie su questa prima scheda di lavoro.

LA FESTA IN MASCHERA:
AIUTIAMO MARTIJN A TROVARE I NUMERI FRATELLI

DURANTE LA FESTA I NUMERI FRATELLI SI METTONO A GIOCARE E SI SEPARANO. MARTIJN VORREBBE RAGGRUPPARE I NUMERI FRATELLI, MA NON CI RIESCE. AIUTALO E SCRIVI UN MESSAGGIO PER LUI PER FARGLI CAPIRE CHI SONO I NUMERI FRATELLI. RICORDATI CHE MARTIJN NON CONOSCE L'ITALIANO, MA CAPISCE MOLTO BENE IL LINGUAGGIO DELLA MATEMATICA.



ADESSO PROVA TU AD AIUTARE CLAUDIO:
SE HA UNA BILANCIA CON QUESTI DUE PESETTI...

... E HA A DISPOSIZIONE QUESTI ALTRI PESETTI:

QUALI PESI PUÒ METTERE SULL'ALTRO PIATTO DELLA BILANCIA PER FARLA STARE IN EQUILIBRIO?
COMPLETA LA BILANCIA QUI SOTTO AFFINCHÉ SIA, SECONDO TE, IN EQUILIBRIO:

COME SCRIVERESTI QUESTA RELAZIONE IN "MATEMATICHESE"?

SPIEGA COME HAI RAGIONATO.

CONSEGNA 8

NELL'ESERCIZIO PRECEDENTE GUENDALINA HA SCRITTO IN "MATEMATICHESE":

$$2 + 2 + 1 + 10 + 5 = 20 + 5$$

SEI D'ACCORDO CON GUENDALINA O NO? _____

SE SEI D'ACCORDO, SPIEGA PERCHÉ.

SE NON SEI D'ACCORDO, SPIEGA PERCHÉ E PROVA A SCRIVERE NELLO SPAZIO QUI SOTTO COME MODIFICHERESTI TU L'UGUAGLIANZA.

DA SOTTO → $3 + 3 = 6$

DA SOPRA → $6 = 3 + 3$

Ripreso da http://www.progettoaral.it/wp-content/uploads/2018/12/p1_Piramidi_0708_PortoTorresSS_Branca_iN.pdf

$143 : 5 \times 28 \text{ r } 3$

Ci troviamo di fronte ad una scrittura priva di senso matematico perché $143 : 5$ non è uguale a $28 \text{ r } 3$

Che fare?
 $143 = 5 \cdot 28 + 3$

Vagone 4: Le mascherine si macchiano

V4-1. Il caso della mascherina macchiata

Sono possibili più strategie. Ne indichiamo due: (A) una più semplice, procedurale, e (B) una che presuppone che gli alunni abbiano incontrato le equazioni (le 'equazioni per gioco' oppure, i più grandi, la bilancia a piatti).

A: $3+5+\blacksquare+2$ è la forma non canonica di 13. Posso trovare il numero sotto la macchia prima sommando gli altri numeri sulla mascherina ($3+5+2=10$) e poi sottraendo 10 a 13: $13-10=3$. Il numero sotto la macchia è 3, infatti: $13=3+5+3+2$.

B. So che le due rappresentazioni sono equivalenti e imposto un'equazione, poi la risolvo:

$$13=3+5+\blacksquare+2$$

$13=10+\blacksquare$ rappresento $3+5+2$ come 10 (relazionale), o: sommo 3, 5, 2 (procedurale)

$13-10=10+\blacksquare-10$ Applico il primo principio della bilancia

Ripreso da <http://www.progettoaral.it/2021/01/13/gioco-delle-mascherine/>

CONSEGNA 3

L'IMPRONTA DELLA ZAMPINA DI UNA VOLPE NASCONDE DELLE CIFRE. RIESCI A SCOPRIRE QUALI SONO, SENZA SBIRCIARE?

$11 + \blacksquare = 17$

L'IMPRONTA COPRE IL NUMERO _____

PERCHÉ, SECONDO TE?

$19 = \blacksquare + 7$

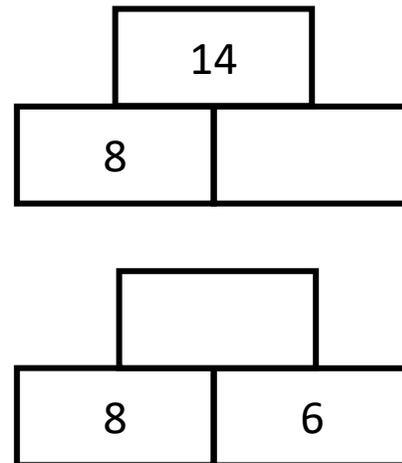
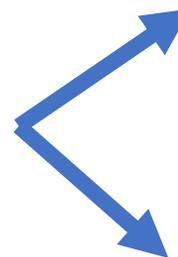
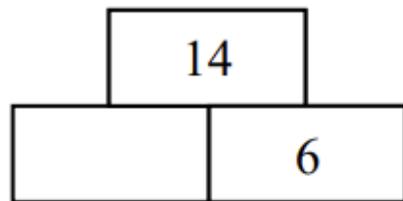
L'IMPRONTA COPRE IL NUMERO _____

PERCHÉ, SECONDO TE?

(1) Nello stagno abbiamo 45 anatre bianche, 30 anatre nere, in totale abbiamo quante anatre? →

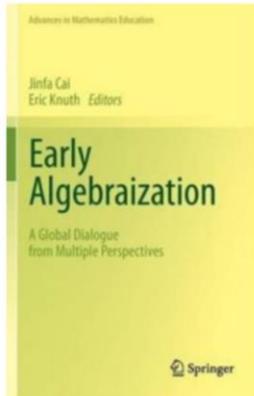
(2) Nello stagno abbiamo anatre bianche e anatre nere in totale 75, tra queste 45 sono anatre bianche, abbiamo quante anatre nere? →

(3) Nello stagno abbiamo anatre bianche e anatre nere in totale 75, abbiamo 30 anatre nere, abbiamo quante anatre bianche?



Ripreso da http://www.progettoaral.it/wp-content/uploads/2016/07/p2_Piramidi_0910_RCMotta_Infortuna.pdf

Early algebra



Cai & Knuth (2011)

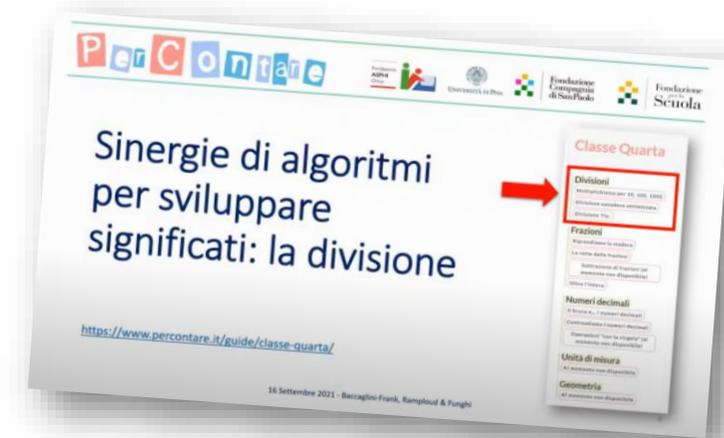
Kieran (2011) elenca una serie di **"temi" caratterizzanti i diversi approcci attraverso i quali l'aritmetica può essere algebrizzata:**

- guidare a vedere il generale nel particolare, lavorando su attività di esplorazione, congettura e argomentazione;
- stimolare l'esplicitazione di regolarità osservate (ad esempio, quelle alla base della costruzione di successioni);
- **supportare l'interpretazione di procedure in termini concettuali;**
- focalizzare l'attenzione sulle relazioni e sulla loro rappresentazione.

20 Marzo 2025 – Annalisa Cusi

6

Webinar del 14/10/2021, «PerContare: Discussione e argomentazione»
<https://www.percontare.it/video-formativi/webinar/>



Webinar del 16/09/2021, «La nuova guida di matematica per la classe quarta della primaria»
<https://www.percontare.it/video-formativi/webinar/>



Grazie!